wxMaxima$_{0.8.2\text{-}0.8.3}$ 簡介

嘉義大學電子物理學系 林立弘

中篇

5. 微積分
6. 方程式
7. 向量與矩陣

上篇的內容

0.安裝

1. 基本操作
2. 符號約定
3. 基本函數
4. 數式的計算與化簡

下篇的內容

8. 檔案處理
9. 繪圖
10. 數據分析

5. 微積分

§5.1 數值積分

用功能(function)romberg 求積分 $\int_0^{\pi/2} dx \sin x$ 的近似值.

```
(%i1) romberg(    /*數值積分                  */
        sin(x),   /*對sin(x)作數值積分*/
        x,        /*以變數x爲對象      */
        0,        /*下界 x = 0         */
        %pi/2     /*上界 x = π/2       */
      );
(%o1) 0.99999987622729
```

可得 $\int_0^{\pi/2} dx \sin x \approx 0.9999999$. 由於未作任何設定時, 精度只有要求到 10^{-4}, 若要提升精度, 可以指定 rombergtol 的值.

```
(%i1) rombergtol:1e-12 $   /*積分精度至10^-12  */
      romberg(             /*數值積分           */
        sin(x),            /*對sin(x)作數值積分*/
        x,                 /*以變數x爲對象      */
        0,                 /*下界 x = 0         */
        %pi/2              /*上界 x = π/2       */
      );
(%o2) 1.0
```

可得 $\int_0^{\pi/2} dx \sin x = 1.000000000000 \pm 10^{-12}$.

功能romberg 可由上方menu選擇 [微積分] → [Integrate]; 若按鈕面版選擇設定了 [全部], 則在下方的 20 個按鈕中就有 1 個是 [積分] 鈕, 也可喚出 [積分] 對話窗. ([積分] 鈕不在初期設定的 12 個按鈕當中, 可以從上方menu中的 [編輯] → [設定] 來追加).

適當回答窗中的格子後, 程式會自動輸入對應的功能格式.

要完成前述的積分問題, 分別點選 [定積分] 及 [數值積分], [方法] 選擇 [romberg] 之後, 分別在 [數式] [變數] [從] [到] 的格子中填入 `sin(x)`, `x`, `0`, `%pi/2`, 按下 [正確], 與 `(%i1)` 相同的功能格式即自動被輸入.

§5.2 定積分與不定積分的嚴密值

有少部份的定積分, 可以化簡為簡單的數式. 試將上述的例子, 改用功能 `integrate` 作嚴密計算.

```
(%i1) integrate(   /*嚴密定積分                */
        sin(x),    /*對sin(x)作嚴密定積分*/
        x,         /*以變數x爲對象            */
        0,         /*下界 x = 0               */
        %pi/2      /*上界 x = π/2             */
      );
(%o1) 1
```

可確定其嚴密值為 1.

有的積分對於任意的上下界, 都有簡單的表示式, 可用單一的不定積分 (反導數) 形式來表示. 同樣利用功能(function)`integrate` 可以求得.

```
(%i1) integrate(   /*求不定積分*/
        sin(x),    /*對於sin(x) */
        x          /*以變數x爲對象*/
      );
(%o1) -cos(x)
```

即 $\int dx \sin x = -\cos x + \text{constant}$. 對於不能化簡的積分式, 則顯示積分原本的形式.

```
(%i1) integrate(       /*求不定積分*/
        sin(sin(x)),   /*對於sin(x) */
        x              /*以變數x爲對象*/
      );
(%o1) ∫ sin(sin(x))dx
```

$\int dx \sin\sin x$ 缺少已知的化簡方法.

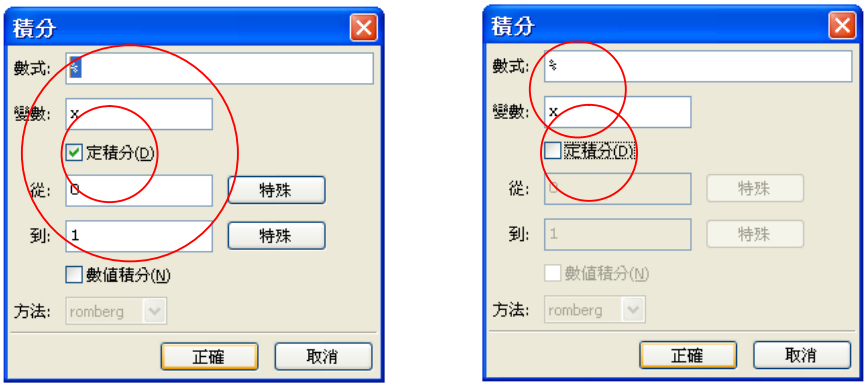
有時雖然 wxMaxima 顯示了積分的結果, 但未完全化簡成理想的形式, 可以與 `ratsimp` 併用處理.

```
(%i1) integrate(
        x^2 * cos(x)
        + 2 * x * sin(x),
        x
      );
(%o1) 2(sin(x)-x cos(x))+(x^2 -2)sin(x)+2 x cos(x)
(%i2) ratsimp(%);
(%o2) x^2 sin(x)
```

得知 $\int dx\,(x^2\cos x + 2x\sin x) = x^2 \sin x + \text{constant}$.

功能(function)`integrate` 可由前述 [積分(Integrate)] 對話窗輸入. 適當回答窗中的格子, 再按下 [正確(OK)] 之後, 程式會自動輸入對應的功能(function)格式. 只要不點選 [數值積分(Numeric integration)], 就不會輸

function
入功能romberg, 改為輸入function功能integrate, 並試圖計算定積分或是不定積分的嚴密結果.



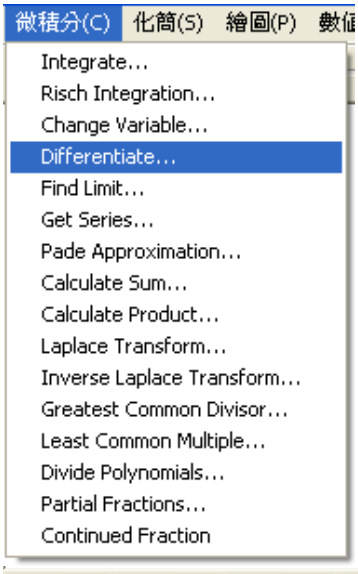
§5.3 常微分, 全微分與偏微分

利用 diff 來求常微分 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3+5x+2)$.

```
(%i1) diff(
        x^3 + 5*x + 2,  /*對x^3+5x+2作1階微分*/
        x               /*以變數x爲對象*/
      );
(%o1) 3 x^2 +5
```

利用 diff 來求 2 階常微分 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^3+5x+2)$.

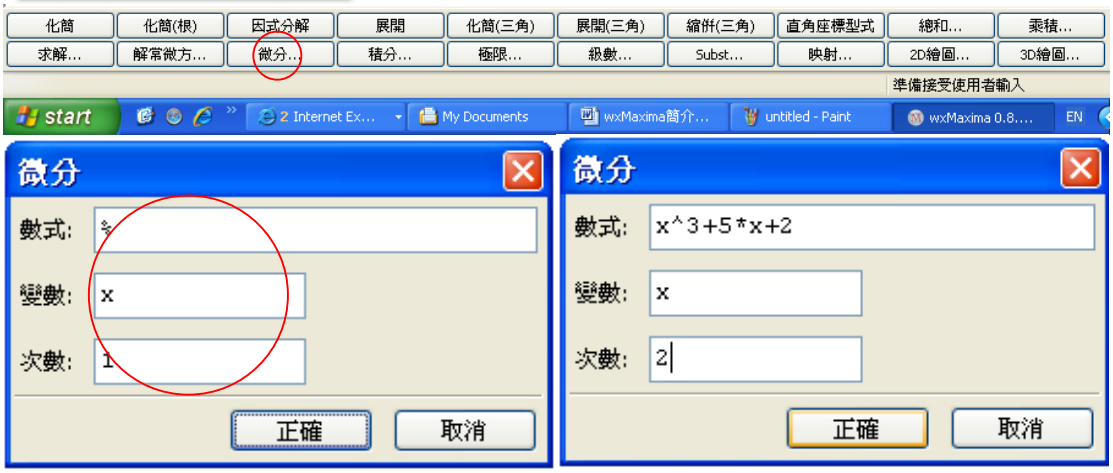
```
(%i1) diff(
        x^3 + 5*x + 2,  /*對x^3+5x+2作微分*/
        x,              /*以變數x爲對象*/
        2               /*微分2階*/
      );
(%o1) 6 x
```



function 功能 diff 可由上方 menu 選擇 [微積分] → [Integrate]; 若 Button panel 按鈕面版選擇設定了 [全部], 則在下方的 20 個按鈕中就有 1 個是 [微分] 鈕, 也可喚出 [微分] 對話窗. ([微分] 鈕不在初期設定的 12 個按鈕當中, 可以從上方menu中的 [編輯] → [設定] 來追加).

適當回答窗中的格子後, 程式會自動輸入對應的 function 功能格式, 並輸出結果.

要完成前述的 2 階微分問題, 填入 [數式] [變數], [次數] 之後, 按下 [正確], 與 (%i1) 相同的 function 功能格式即自動被輸入, 並輸出結果.



當變數的個數超過 1 個, function 功能 diff 可以流用來進行全微分及偏微分的運算, 但使用時要相當的小心. 在做測試之前, 我們先用 function 功能 kill 消去所有對 x 及 y 所下過的定義.

利用 function 功能 diff 來求全微分.

```
(%i55) kill(x, y, z);
       diff(
         x^2 + x * y(x) + z(x),
         x
       );
(%o55) done
```

$$(\%o56)\quad \frac{d}{dx}z(x)+x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)+y(x)+2x$$

可知 $\frac{d}{dx}(x^2+x\cdot y(x)+z(x))=2x+x\frac{dy}{dx}+y(x)+\frac{dz}{dx}$. 在 (%i55) 式中我們利用 y(x) 及 z(x) 的形式告訴程式 y(x) 與 z(x) 是 x 的函數, 但不知道形式. 不過要注意, wxMaxima 對於太複雜的多重函數的全微分不見得能夠很正確的整理出來.

其次利用function功能diff 來求偏微分.

```
(%i63) kill(x, y, z);
       diff(
         x^2 + x * y + z,
         x
       );
(%o63) done
 (%o64) y+2 x
```

可知 $\frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy+z)\Big|_{y,z=\text{constant}} = 2x+y$. 在 (%i63) 式中我們僅輸入 y 及 z 的形式, 則function功能diff 就認定在微分時 y 及 z 被保持為常數. 得到的結果就等同於偏微分的效果.

```
(%i65) kill(x, y, z);
       z: x;
       diff(
         x^2 + x * y + z,
         x
       );
(%o65) done
 (%o66) x
 (%o67) y+2 x+1
```

可知 $\frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy+z(x))\Big|_{\substack{y=\text{constant}\\ z(x)=x}} = 2x+y+1$. 在 (%i65) 式中雖然與 (%i63) 式相差無幾, 但由於在微分之前 z 被指定為 x, 則function功能diff 就認定 z 在微分時不是常數, 而將 z(x) 的關係先代入之後再微分.

另外若要抑制 wxMaxima 程式作微積分的計算, 可以利用「'」符號. 程式將簡單的六則運算化簡完後, 就不再繼續進行微積分的運算. 這個功能在解微分方程式時將會被用到.

```
(%i1) 'diff(
        x^3 + 5*x + 2, /*對x^3+5x+2微分*/
        x,             /*以變數x爲對象*/
        2              /*微分2階*/
      );
(%o1) d^2/dx^2 (x^3+5 x+2)
```

```
(%i2) 'integrate(
        x + sin(x),
        x
      );
```

$$(\%o2)\quad \int \sin(x)+x\,dx$$

```
(%i4) 'integrate(
        x^2 + cos(x),
        x,
        2,
        5
      );
```

$$(\%o4)\quad \int_{2}^{5} \cos(x)+x^2\,dx$$

6. 方程式

§6.1 代數方程式的數值解

效能	wxMaxima功能格式
在 $a \le x \le b$ 的範圍中, 求 $f(x)=0$ 的數值解	find_root(代數方程式 $f(x)=0$, 對象變數 x, 界 a, 界 b)
求多項式 $f(x)=0$ 所有的數值解	allroots(多項式方程式 $f(x)=0$)
求多項式 $f(x)=0$ 所有的實數數值解	realroots(多項式方程式 $f(x)=0$)

定義多項式函數 $f(x)=x^3+8x-3$.

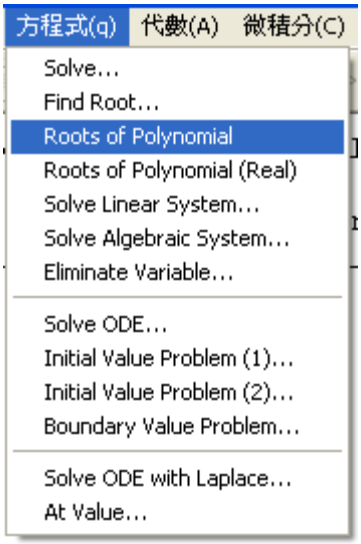
```
(%i1) f(x) := x^3 + 8*x - 3;
(%o1) f(x):=x^3+8 x-3
```

利用功能allroots 求多項式 $f(x)=0$ 所有的 3 個數值解.

```
(%i2) allroots(
        f(x)=0
      );
(%o2) [x=0.36873318756938, x=2.846396515370145 %i-
0.18436659378469, x=-2.846396515370145 %i-0.18436659378469
]
(%i3) transpose(%);
```

(%o3)
$$\begin{bmatrix} x=0.36873318756938 \\ x=2.846396515370145\,\%i-0.18436659378469 \\ x=-2.846396515370145\,\%i-0.18436659378469 \end{bmatrix}$$

若由上方menu選單選擇 [方程式Equations] → [Roots of Polynomial], 程式會自動輸入 `allroots(%)` 並將所有的答案輸出.



要引用 `(%o2)` 中的 3 個解的數值, 可以分別用 `rhs(%o2[1])`, `rhs(%o2[2])`, `rhs(%o2[3])` 等.

```
(%i4) rhs(%o2[1]);
(%o4) 0.36873318756938
(%i5) rhs(%o2[2]);
(%o5) 2.846396515370145 %i-0.18436659378469
```

要拮取等式右邊, 可以利用功能function `rhs` (即等式右邊的縮寫, right-hand side). 若要取等式左邊則用功能function `lhs` (即等式左邊的縮寫, left-hand side).

利用功能function `realroots` 求多項式函數方程式 $f(x)=0$ 所有的實數數值解.

```
(%i1) f(x) := x^4;
      realroots(
        f(x)=4
      );
(%o1) f(x):=x^4
(%o2) [x=-47453133/33554432, x=47453133/33554432]
```

注意雖然解答以分數的形式表示, 但並非嚴密解 $x=\pm\sqrt{2}$, 只是近似解. 純虛數的 2 個解則被省略.

```
(%i3) float(%);
(%o3) [x=-1.414213567972183, x=1.414213567972183]
```

未指定時 $|f(x)-4|\approx 0$ 的精度為 10^{-7}.

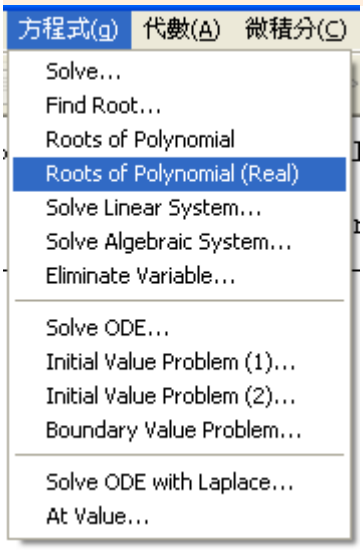
```
(%i4) x[1]: rhs(%o3[1]);  /*從%o3中取出第1個解x1的數值*/
      f(x[1]) - 4;
(%o4) -1.414213567972183
(%o5) 6.3346451639745283 10^-8
```

可用變數 `rootsepsilon` 來指定精度; 也可以在功能function `realroot` 的引數中直接指定.

```
(%i1) f(x) := x^4;          /*定義多項式f(x) = x^4          */
      realroots(            /*找多項式代數方程實數近似解*/
        f(x)=4,             /*找f(x) = 4的實數近似解       */
        1e-12               /*令誤差|f(x) - 4| < 10^-12 */
      );
      float(%);             /*將近似解化爲小數             */
      x[1]: rhs(%[1]);      /*取出第1個解x1的數值          */
                            /*計算誤差 f(x1) - 4           */
      f(x[1]) - 4;
(%o1) f(x):=x^4
(%o2) [x=-3109888511975/2199023255552, x=3109888511975/2199023255552]
(%o3) [x=-1.414213562372879, x=1.414213562372879]
(%o4) -1.414213562372879
(%o5) -2.4433788325950445 10^-12
```

也可以利用功能(function)ev 將近似解代入 $f(x)$ 驗算, 此時不用功能(function)rhs.

```
(%i6) ev(
        f(x) - 4,   /*被代入的數式   */
        %o3[1]      /*代入值的方程式*/
      );
(%o6) -2.4433788325950445 10^-12
```



若由上方menu(選單)選擇 [方程式(Equations)] → [Roots of Polynomial (Real)], 程式會自動輸入 realroots(%), 並立即將所有的答案輸出.

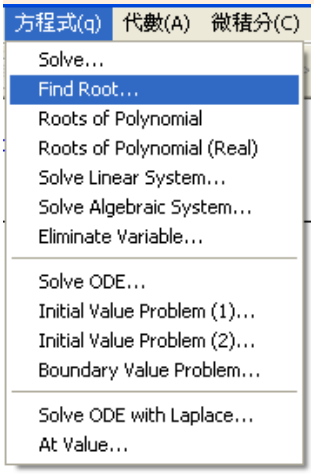
對於非多項式的方程式, 也有其它的功能(function)來求數值解.

試利用功能(function)find_root 尋找 $e^x(x-1)=1$ 在 $0 \le x \le 2$ 處的近似解. 首先定義非多項式的函數 $f(x)=e^x(x-1)$, 再利用功能(function)find_root 來求數值解.

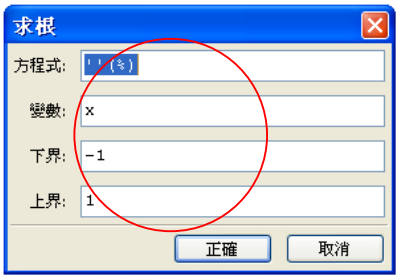
```
(%i1) f(x) := exp(x) * (x-1); /*定義f(x) = exp(x)*(x-1) */
      find_root(              /*找近似解                  */
        f(x)=1,               /*找方程式f(x)=1的近似解     */
        x, 0, 2               /*在0<x<2的範圍內           */
      );
(%o1) f(x):=exp(x)(x-1)
 (%o2) 1.278464542761074
```

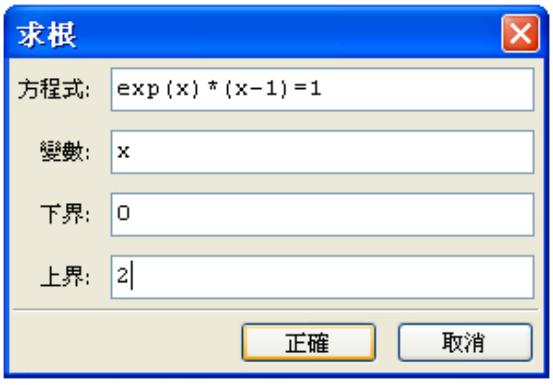
並將解答代回原式驗算.

```
(%i3) f(%)-1;
(%o3) 4.4408920985006262 10^-16
```



function 功能 find_root 可由上方menu選擇 [方程式] → [Find Root], 程式會出現 [求根] 對話窗, 在 [方程式][變數][下界][上界] 各格填入適當的數式, 再按下 [正確] 鈕後, 程式將自動輸入功能格式, 並將答案輸出.





§6.2 代數方程式的嚴密解析解

有部份的代數方程式其嚴密解具有簡單的數式表示, 可以利用以下的功能.

效能	wxMaxima功能格式
解代數方程式	solve(*方程式*, *變數*)
解聯立方程式	solve([*方程式*$_1$, *方程式*$_2$, ...], [*變數*$_1$, *變數*$_2$, ...])
解聯立方程式	algsys([*方程式*$_1$, *方程式*$_2$, ...], [*變數*$_1$, *變數*$_2$, ...])

試以功能solve 對於 x 解 $x^2+1=0$.

```
(%i1) solve(
        x^2 + 1 = 0,
        x
      );
(%o1) [x=-%i,x=%i]
```

試以功能(function)`solve` 或 `algsys` 對於 x, y 解聯立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=1 \end{cases}$.

```
(%i1) solve(
        [ x^2 + y^2 = 1,
          x + y = 1],
        [x, y]
      );
(%o1) [[x=1,y=0],[x=0,y=1]]
(%i2) algsys(
        [ x^2 + y^2 = 1,
          x + y = 1],
        [x, y]
      );
(%o2) [[x=1,y=0],[x=0,y=1]]
```

試以功能(function)`solve` 對於 x 解 $x^3=8$.

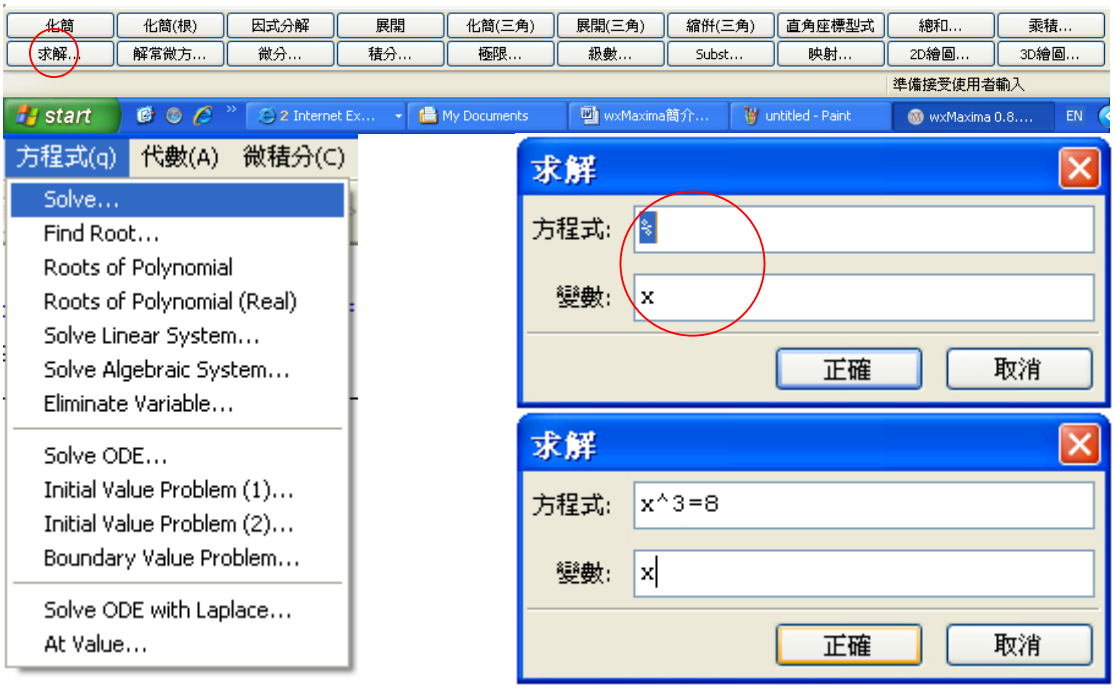
```
(%i1) solve(
        x^3 = 8,
        x
      );
(%o1) [x=sqrt(3) %i-1,x=-sqrt(3) %i-1,x=2]
```

分別驗算這 3 個解的 3 次方是否為 8.

```
(%i2) rhs( %o1[1] ) ^ 3, ratsimp;
      rhs( %o1[2] ) ^ 3, ratsimp;
      rhs( %o1[3] ) ^ 3, ratsimp;
(%o2) 8
 (%o3) 8
 (%o4) 8
```

皆得到結果為 8.

功能(function)`solve` 可由主按鍵盤中的 [求解(Solve)] 鈕, 或是由上方menu(選單)選擇 [方程式(Equations)] → [Solve] 喚出, 程式會出現 [求解(Solve)] 對話窗, 在 [方程式(Equations)][變數(Variables)] 各格填入適當的數式, 再按下 [正確(OK)] 鈕後, 程式將自動輸入功能(function)格式, 並將答案輸出.


化簡
化簡(根)
因式分解
展開
化簡(三角)
展開(三角)
縮併(三角)
直角座標型式
總和...
乘積...
求解...
解常微方...
微分...
積分...
極限...
級數...
Subst...
映射...
2D繪圖...
3D繪圖...
準備接受使用者輸入
start
2 Internet Ex...
My Documents
wxMaxima簡介...
untitled - Paint
wxMaxima 0.8....
EN
方程式(q)
代數(A)
微積分(C)
Solve...
Find Root...
Roots of Polynomial
Roots of Polynomial (Real)
Solve Linear System...
Solve Algebraic System...
Eliminate Variable...
Solve ODE...
Initial Value Problem (1)...
Initial Value Problem (2)...
Boundary Value Problem...
Solve ODE with Laplace...
At Value...
求解
方程式:
變數:
x
正確
取消
求解
方程式:
x^3=8
變數:
x
正確
取消

§6.3 用 ode2 解常微分方程式

效能	wxMaxima功能格式
常微分方程式求通解	ode2(*常微分方程式*, *因變數*, *自變數*)
1 階常微分方程式的初始條件求特解	ic1(*通解的等式*, *初始點* t=0, *初始值* f(0)=f0)
2 階常微分方程式的初始條件求特解	ic2(*通解的等式*, *初始點* t=0, *初始值* x=x0, *一階微分初始值* 'diff(x,t)=v0)
2 階常微分方程式的邊界條件求特解	bc2(*通解的等式*, *邊界值* x=x1, *邊界值* y=y1, *邊界值* x=x2, *邊界值* y=y2)

解 1 階常微分方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) = a\, f(t)$, 初始條件 $f(t=0)=1$. 先用功能ode2 解出通解. 「'」符號如前章所述, 通知程式保留微分的形式, 不要作微分的動作, 因此在解微分方程式時經常會出現「'diff(...,...)」的形式. 'diff(f(t),t) 是表示 1 階微分 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$. 在 Maxima 某些版本中, 解 ODE 時也可以不加「'」.

```
(%i1) ode2(                                  /*解常微分方程式*/
        'diff(f(t),t) = a * f(t),            /* f'(t) = a f(t) */
        f(t),                                /*未知函數爲f(t) */
        t                                    /*自變數爲t */
      );
(%o1) f(t)=%c %e^(a t)
```

其中%c 是表示未定的常數, 要由初始條件來決定. 通解改寫成一般手寫的數學式即為 $f(t) = c\exp(a\,t)$. 再利用功能ic1 來將初始值代入.

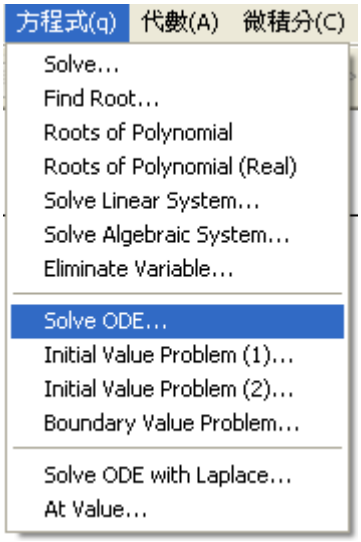
```
(%i2) ic1(          /*針對1階常微分方程式解特解*/
        %,          /*通解的形式引用%o1的結果   */
        t=0,        /*自變數的初始值t=0         */
        f(0)=1      /*未知函數的初始值f(0)=1    */
      );
(%o2) f(t)=%e^(a t)
```

可知滿足初始條件的特解為 $f(t) = \exp(a\,t)$.

解 1 個特殊的 1 階線性常微分方程式 $\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x} + x\, f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

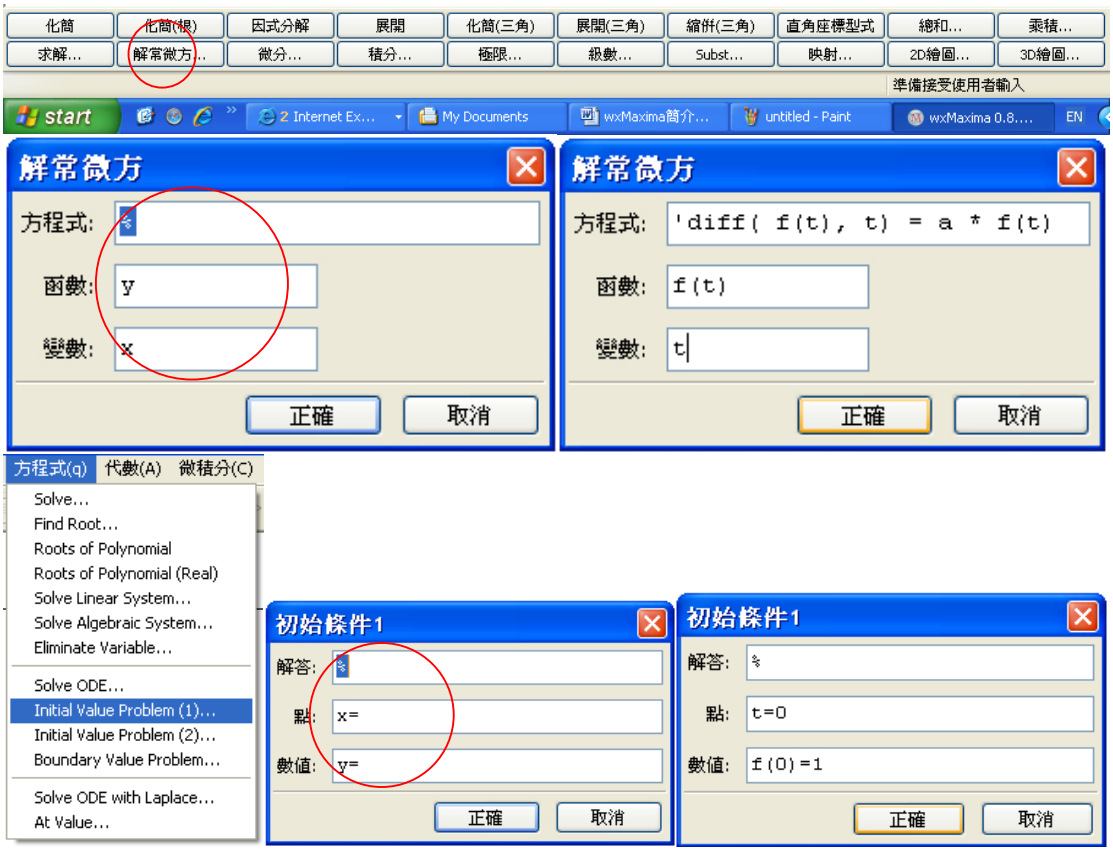
```
(%i1) ode2(                                  /*解微分方程式                 */
        'diff(f(x),x) + x*f(x) = sin(x)/x,   /* f'(x) + x f(x) = sin(x)/x */
        f(x),                                /*未知函數f(x)                 */
        x                                    /*自變數x                      */
      );
                                                  /                  2
                                                 |                  x
                                                 |                  --
                                                 |                  2
                                                 |  %e  sin(x)
                                                 |  ------------ dx + %c
                                                 |        x
                                                 /
                                                  2
                                                 -x
                                                 ---
                                                  2
(%o1) f(x)=%e
```

只知能將解寫成 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}\left(\int \mathrm{d}\,x\,\frac{\mathrm{e}^{x^2/2}\sin x}{x}+\text{constant}\right)$, 積分的部份無法進一步化簡.



要喚出功能(function)ode2, 可按按鍵盤中 [解常微方(Solve ODE)] 鈕, 或是由上方menu(選單)選擇 [方程式(Equations)] → [Solve ODE], 程式會出現 [解常微方(Solve ODE)] 對話窗, 在 [方程式(Equation)][函數(Function)][變數(Variable)]等各格中, 鍵入適當的內容, 按下 [正確(OK)] 鍵後, 程式會自動輸入功能(function)格式, 並輸出通解.

接著要喚出功能(function)ic1, 由上方menu(選單)選擇 [方程式(Equations)] → [Initial Value Problem (1)], 程式會出現 [初始條件 1(IC1)] 對話窗, 在 [解答(Solution)][點(Point)][數值(Value)]等各格中, 鍵入適當的內容, 按下 [正確(OK)] 鍵後, 程式會自動輸入功能(function)格式, 並輸出特解.



解 2 階常微分方程式 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+Kx=0$, $K>0$. 先用功能(function)ode2 解出通解.

```
(%i1) assume( K>0 );                    /*設K>0 */
      ode2(                             /*解常微分方程式*/
        'diff(x,t,2) + K*x = 0,         /* x'' + Kx = 0 */
        x,                              /*因變數爲x */
        t                               /*自變數爲t */
      );
(%o1) [K>0]
```

(%o2) $x=\%k1\sin(t\sqrt{K})+\%k2\cos(t\sqrt{K})$

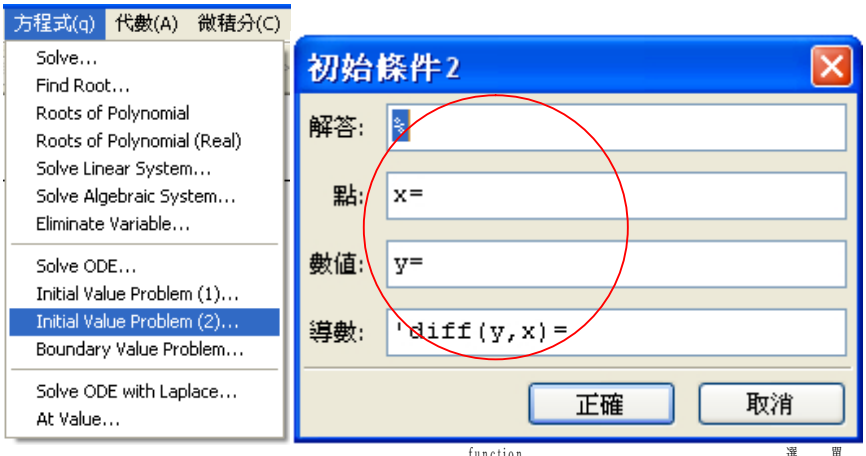
其中'diff(x,t,2)是表示 2 階微分, %k1 及%k2 是表示未定的常數, 要由初始條件來決定. 通解改寫成一般手寫的數學式即為 $x=k_1\sin\sqrt{K}\,t+k_2\cos\sqrt{K}\,t$. 若初始條件為 $t=0$ 時 $x(t=0)=x_0$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t=0)=v_0$, 利用功能(function)ic2 來將初始值代入.

```
(%i3) ic2(                  /*針對2階常微分方程式解特解          */
        %,                  /*通解的形式(引用%o2的結果)          */
        t=0,                /*自變數的初始值t=0                  */
        x=x[0],             /*未知函數的初始值x(0)=x0            */
        'diff(x,t)=v[0]     /*未知函數的1階微分的初始值x'(0)=v0  */
      );
```

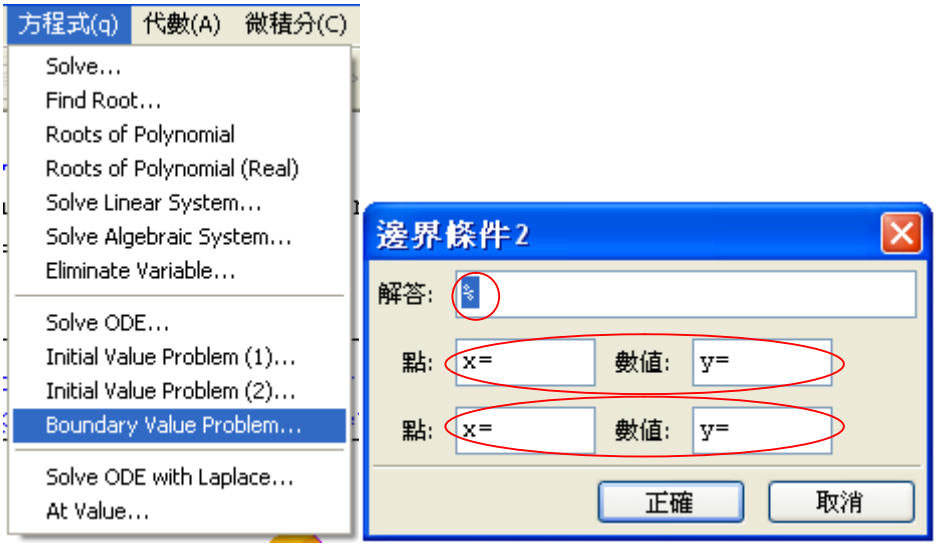
(%o3) $x=\frac{v_0\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}+x_0\cos(t\sqrt{K})$

可知滿足初始條件的特解為 $x=\frac{v_0}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}\,t+x_0\cos\sqrt{K}\,t$. 在(%i3)中分別以 x[0]及 v[0]的形式輸入 x_0 及 v_0.

要喚出功能(function)ic2, 亦可由上方menu(選單)選擇 [方程式(Equations)] → [Initial Value Problem (2)], 程式會出現 [初始條件(IC2) 2] 對話窗, 在 [解答(Solution)][點(Point)][數值(Value)][導數(Derivative)]等各格中, 鍵入適當的內容, 按下 [正確(OK)] 鍵後, 程式會自動輸入功能(function)格式, 並輸出特解.



最後討論邊界值問題. 要喚出功能(function)bc2, 亦可由上方menu(選單)選擇 [方程式(Equations)] → [Boundary Value Problem], 程式會出現 [邊界條件(BC2) 2] 對話窗, 在 [解答(Solution)][點(Point)][數值(Value)][點(Point)][數值(Value)]等各格中, 鍵入適當的內容, 按下 [正確(OK)] 鍵後, 程式會自動輸入功能(function)格式, 並輸出特解.



§6.4 用 desolve 解常微分方程式

用功能(function)desolve 來解常微分方程式時, 程式內部計算原理中利用了拉普拉斯Laplace轉換, 特別適合含有複雜函數形式時初始條件問題的求解.

效能	wxMaxima功能(function)格式
設定初始條件	Atvalue(*待解函數的 n 階微分, 初始點, 初始值*)
常微分方程式求特解	Desolve(*微分方程式, 待解函數*)

與功能(function)ode2 在語法上顯著不同的是, 要先以功能(function)atvalue 設定初始條件, 之後纔使用功能(function)desolve 告知微分方程式. 對於 n 階常微分方程式, 要先設定 n 個初始條件, 也就是使用功能(function)atvalue 共 n 次.

同樣解 2 階常微分方程式 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+Kx=0$, $K>0$, 但改用 atvalue 與 desolve 等 2 個功能(function).

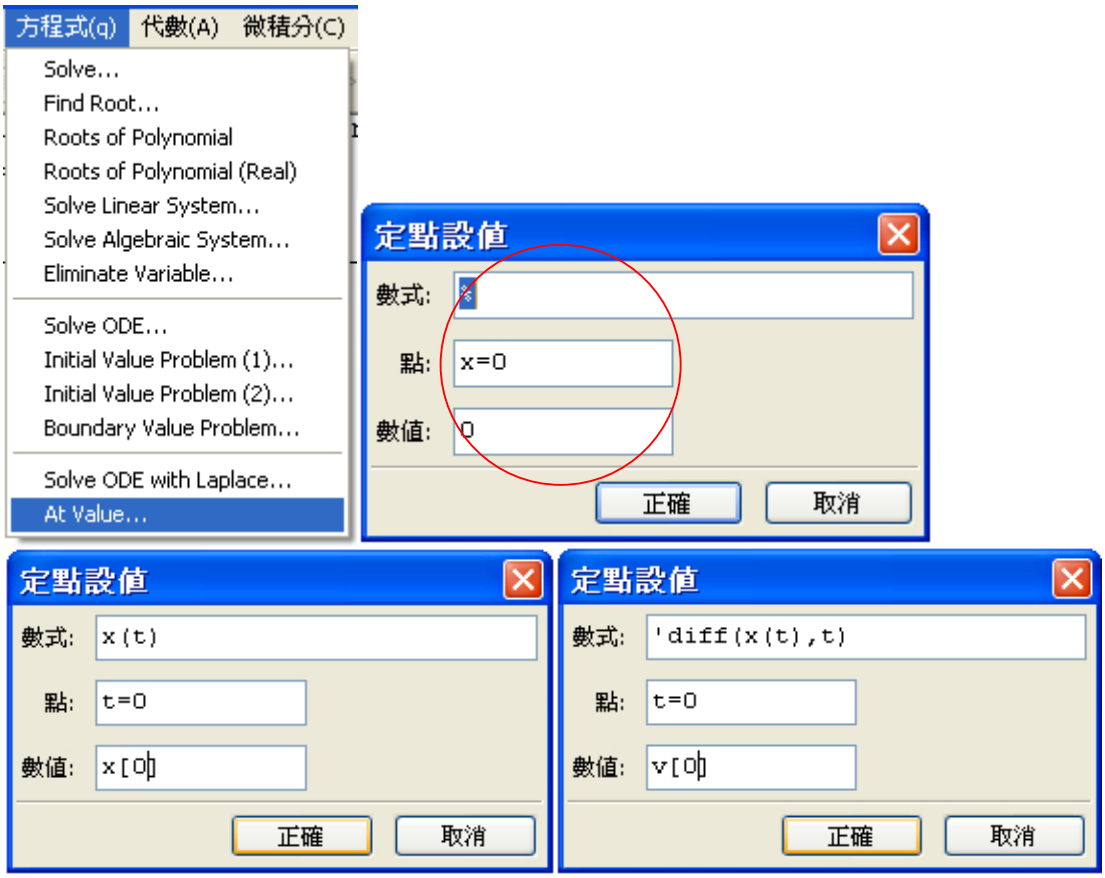
```
(%i1) assume( K>0 );   /*假設K>0          */
      atvalue(         /*指定初始條件一*/
        x(t),          /*未知函數x(t)    */
        t=0,           /*初始點t=0       */
        x[0]           /*函數值x(0)=x0  */
      );
      atvalue(           /*指定初始條件二          */
        'diff(x(t),t),   /*未知函數的1階微分x'(t)  */
        t=0,             /*初始點t=0               */
        v[0]             /*微分值x'(0)=v0          */
      );
      desolve(                              /*解常微分方程式    */
        'diff(x(t),t,2) + K * x(t) = 0,     /* x''(t)+K x(t)=0 */
        x(t)                                /*未知函數爲x(t)    */
      );
(%o1) [K>0]
```

(%o2) x_0

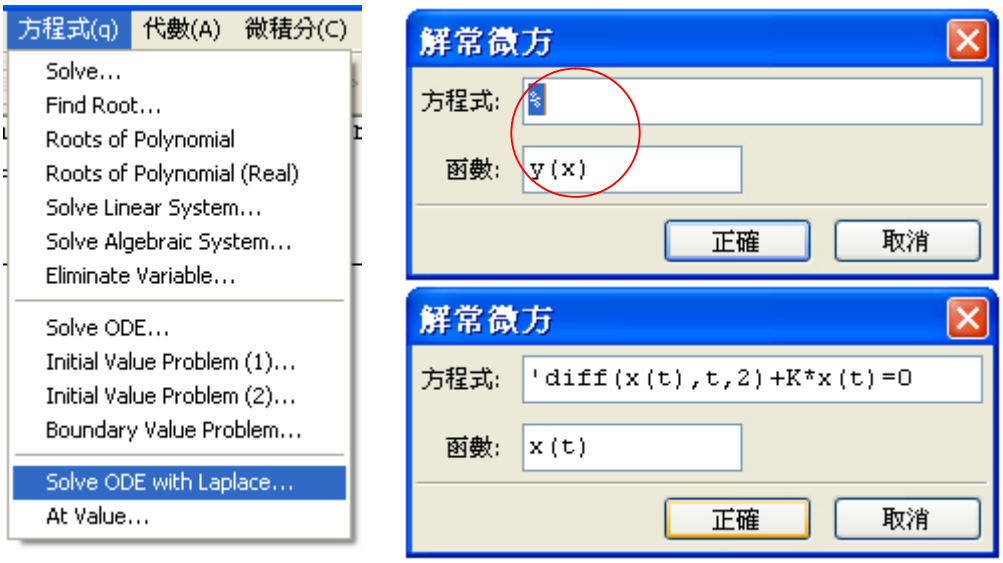
(%o3) v_0

(%o4) $x(t)=\dfrac{v_0\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}+x_0\cos(t\sqrt{K})$

要喚出功能(function)atvalue, 可由上方menu(選單)選擇 [方程式(Equations)] → [At Value], 程式會出現 [定點設值(At value)] 對話窗, 在 [數式(Expression)][點(point)][數值(Volume)]等各格中, 鍵入適當的內容, 按下 [正確(OK)] 鍵後, 程式會設定初始條件. 對於 n 階微分方程式, 需逐次輸入 n 個初始條件.



接著要喚出功能(function) desolve, 由上方menu(選單)選擇 [方程式(Equations)] → [Solve ODE with Laplace], 程式會出現 [解常微方(Solve ODE)] 對話窗, 在 [方程式(Equation)][函數(Function)] 等各格中, 鍵入適當的內容, 按下 [正確(OK)] 鍵後, 程式會自動輸入功能(function)格式, 並輸出特解.



試解聯立微分方程式 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x(t)-y(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x(t)+2y(t)\end{cases}$, 初始條件為 $\begin{cases}x(t=0)=1\\ y(t=0)=1\end{cases}$.

```
(%i1) atvalue(   /*設定初始條件 */
        x(t),    /*未知函數x(t) */
        t=0,     /*初始點t=0    */
        1        /* x(0)=1      */
      )$
      atvalue(   /*設定初始條件 */
        y(t),    /*未知函數y(t) */
        t=0,     /*初始點t=0    */
        1        /* y(0)=1      */
      )$
      desolve(                              /*解聯立微分方程式   */
        [
          'diff(x(t),t) = 2*x(t) - y(t),    /* x' = 2x - y       */
          'diff(y(t),t) = x(t) + 2*y(t)     /* y' = x + 2y       */
        ],
        [x(t),y(t)]                         /*未知函數x(t), y(t) */
      );
(%o3) [x(t)=%e^(2 t)(cos(t)-sin(t)),y(t)=%e^(2 t)(sin(t)+cos(t))]
```

得其解為 $\begin{cases}x(t)=\mathrm{e}^{2t}(\cos t-\sin t)\\ y(t)=\mathrm{e}^{2t}(\cos t+\sin t)\end{cases}$. 有 1 種程式寫法是將方程式存入某個名稱內, 也許看起來會清爽一些.

```
(%i1) eq1: 'diff(x(t),t) = 2*x(t) - y(t);
      eq2: 'diff(y(t),t) = x(t) + 2*y(t);
      eqs: [eq1, eq2] $
      atvalue(x(t), t=0, 1)$
      atvalue(y(t), t=0, 1)$
      desolve(eqs, [x(t), y(t)]);
```

$$(\%o1)\quad \frac{d}{dt}x(t)=2\,x(t)-y(t)$$

$$(\%o2)\quad \frac{d}{dt}y(t)=2\,y(t)+x(t)$$

$$(\%o6)\quad [x(t)=\%e^{2\,t}(\cos(t)-\sin(t)),\ y(t)=\%e^{2\,t}(\sin(t)+\cos(t))]$$

得到相同的結果, 但是功能(function)內沒有繁雜的巢狀結構, 也許會容易讀些.

再解另一聯立微分方程式 $\begin{cases}\dfrac{df}{dx}=\dfrac{dg}{dx}+\sin x\\ \dfrac{d^2g}{dx^2}=\dfrac{df}{dx}-\cos x\end{cases}$, 初始條件 $\begin{cases}\dfrac{dg}{dx}(x=0)=a\\ f(x=0)=1\end{cases}$

```
(%i1) atvalue(          /*設定初始條件          */
        'diff(g(x),x),  /*未知函數的微分g'(x) */
        x=0,            /*初始點x=0            */
        a               /* g'(0)=a             */
      )$
      atvalue(          /*設定初始條件 */
        f(x),           /*未知函數f(x) */
        x=0,            /*初始點x=0    */
        1               /* f(0)=1      */
      )$
      desolve(                                          /*解聯立微分方程式    */
        [
          'diff(f(x),x) = 'diff(g(x),x) + sin(x),       /* f'(x)=g'(x)+sin(x) */
          'diff(g(x),x,2) = 'diff(f(x),x) - cos(x)      /* g"(x)=f'(x)-cos(x) */
        ],
        [f(x),g(x)]                                     /*未知函數f(x), g(x) */
      );
```

$$(\%o3)\quad [f(x)=a\,\%e^{x}-a+1,\ g(x)=\cos(x)+a\,\%e^{x}-a+g(0)-1]$$

得知解為 $\begin{cases}f(x)=a\,e^{x}-a+1\\ g(x)=\cos x+a\,e^{x}-a+g(0)-1\end{cases}$.

7. 向量與矩陣

§7.1 三維向量

以 raw vector 的形式指定 1 個橫式向量

```
(%i1) a: [ a[x], a[y], a[z] ];
(%o1) [a_x, a_y, a_z]
(%i2) a[1];
(%o2) a_x
```

§7.2 實向量的內積

實向量的內積, 用點「.」表示.

```
(%i3) b: [ b[x], b[y], b[z] ];
(%o3) [b_x, b_y, b_z]
(%i4) a.b;
(%o4) a_z b_z + a_y b_y + a_x b_x
```

定義實向量的大小為函數 norm.

```
(%i5) norm(v) := sqrt(v.v);
(%o5) norm(v):=sqrt(v . v)
(%i6) norm(b);
(%o6) sqrt(b_z^2 + b_y^2 + b_x^2)
```

§7.3 實向量的外積

定義實向量的外積.

```
(%i7) cross( u, v ) :=
        [
          u[2] * v[3] - u[3] * v[2],
          u[3] * v[1] - u[1] * v[3],
          u[1] * v[2] - u[2] * v[1]
        ];
(%o7) cross(u, v):=[u_2 v_3-u_3 v_2, u_3 v_1-u_1 v_3, u_1 v_2-u_2 v_1]
```

試計算 $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$ 與 $\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}}$. 確認 $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{0}}$.

```
(%i8) cross( a, b );
(%o8) [a_y b_z-b_y a_z, b_x a_z-a_x b_z, a_x b_y-b_x a_y]
(%i9) cross( b, a );
(%o9) [b_y a_z-a_y b_z, a_x b_z-b_x a_z, b_x a_y-a_x b_y]
(%i10) cross( a, b ) + cross( b, a );
(%o10) [0, 0, 0]
```

觀察 $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$ 的各分量.

```
(%i11) cross( a, b )[1];
(%o11) a_y b_z-b_y a_z
(%i12) cross( a, b )[2];
(%o12) b_x a_z-a_x b_z
(%i13) cross( a, b )[3];
(%o13) a_x b_y-b_x a_y
```

§7.4 矩陣的基本運算

restart

將程式重啟以消去記憶. 指定 1 個 2×2 的正方矩陣.

```
(%i1) A: matrix(          /*定義矩陣A的值*/
           [a, b],        /*  [ a  b ]    */
           [c, d]         /*  [ c  d ]    */
         );
      display(A[1,1])$ /*顯示元素A[1,1] */
      display(A[1,2])$ /*顯示元素       */
      display(A[2,1])$ /* ...           */
      display(A[2,2])$
```

$$(\%o1)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

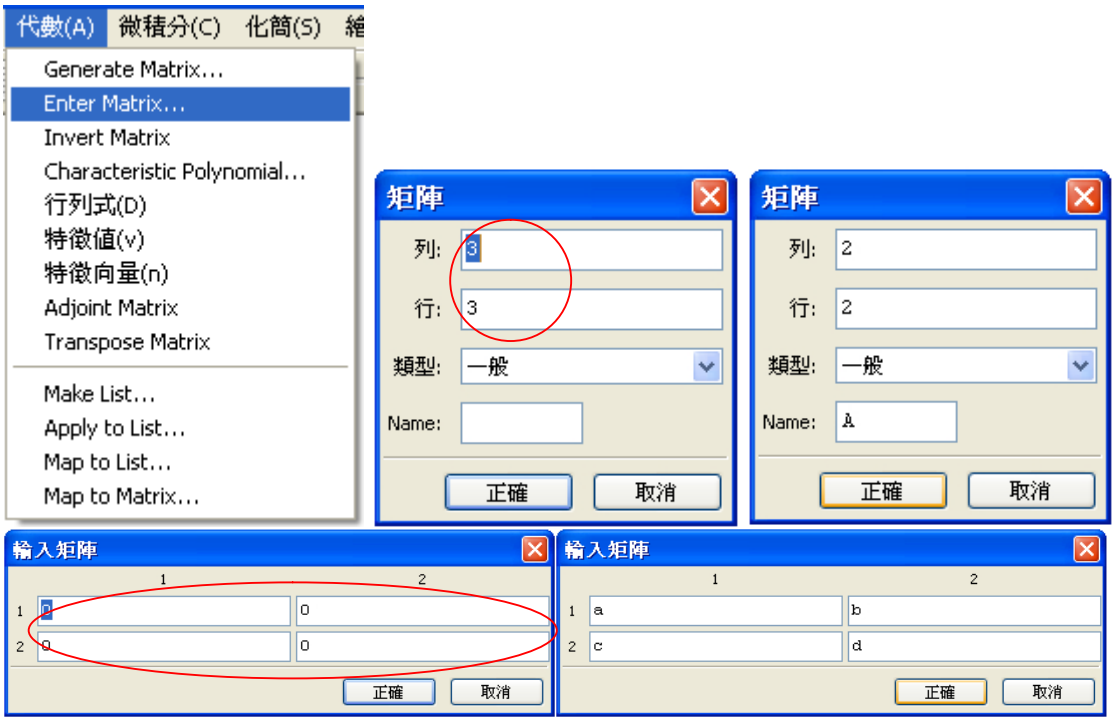
$$A_{1,1}=a$$

$$A_{1,2}=b$$

$$A_{2,1}=c$$

$$A_{2,2}=d$$

指定矩陣的各元素時, 也可以從上方menu(選單)選擇 [代數(Algebra)] → [Enter Matrix], 之後利用所出現的對話窗來輸入即可.

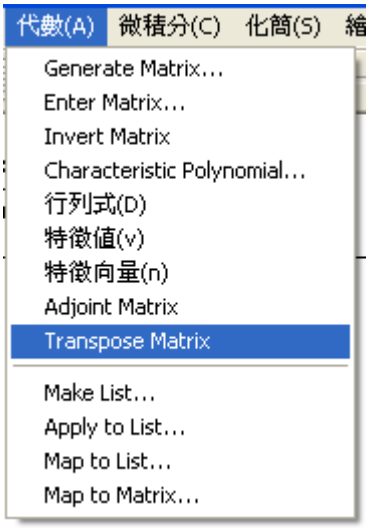


利用函數 `transpose` 作轉置.

```
(%i2)                     /* 矩陣A的轉置矩陣*/
      transpose(A);
```

$$(\%o2)\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

若從上方menu選擇 [代數] → [Transpose Matrix], 會直接輸入 `transpose(%)` 並送出結果



利用函數 `determinant` 計算行列式.

```
(%i3)                          /*矩陣A的行列式|A|  */
      determinant(A);
(%o3) a d-b c
```

若從上方menu選擇 [代數] → [行列式], 會自動輸入 `determinate(%)`, 並立即輸出結果.

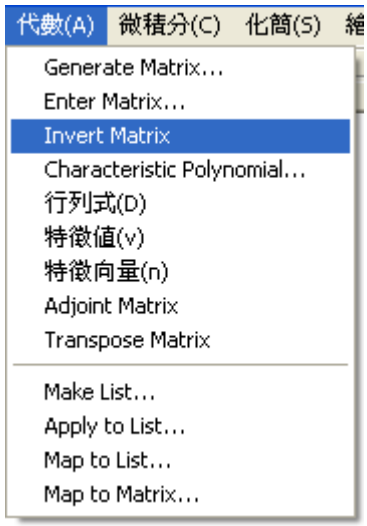
利用「...`^^-1`」計算逆矩陣. 注意「...`^-1`」並不能得到逆矩陣, 只是把矩陣的每個元素求倒數而已. 函數 `invert` 則與「...`^^-1`」效果相同.

```
(%i4) A^^-1;          /*矩陣A的反矩陣*/
      invert(A);
```

$$(\%o4)\begin{bmatrix} \frac{d}{a\,d-b\,c} & -\frac{b}{a\,d-b\,c} \\ -\frac{c}{a\,d-b\,c} & \frac{a}{a\,d-b\,c} \end{bmatrix}$$

$$(\%o5)\begin{bmatrix} \frac{d}{a\,d-b\,c} & -\frac{b}{a\,d-b\,c} \\ -\frac{c}{a\,d-b\,c} & \frac{a}{a\,d-b\,c} \end{bmatrix}$$

若從上方menu選擇 [代數] → [Invert Matrix], 會自動輸入 `invert(%)`, 並立即輸出結果.



驗證 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{1}$, 其積為單位矩陣. 矩陣的乘法也是用點「.」表示, 但是注意前後有數字時, 點「.」的前後要加空白, 纔能與小數點有所區別.

```
(%i6)                          /*驗證inv(A)A=1 */
      A^^-1 . A, ratsimp;
```

$$(\%o6)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意矩陣之間若以「*」相連, 是表示將對應的元素相乘形成新的矩陣, 而非所謂的矩陣乘法. 「+」「−」則代表一般矩陣的加法及減法.

```
(%i7)                    /*反矩陣與矩陣對應的元素相乘*/
      A^^-1 * A;
```

$$(\%o7)\begin{bmatrix} \frac{a\,d}{a\,d-b\,c} & -\frac{b^2}{a\,d-b\,c} \\ -\frac{c^2}{a\,d-b\,c} & \frac{a\,d}{a\,d-b\,c} \end{bmatrix}$$

常數與矩陣間以「*」相連, 與一般規定的常數乘以矩陣的結果相同. 因此得到的結果是各元素相乘而得的矩陣, 不是單位矩陣.

$$\{\{\mathbf{A}^{-1}\}_{ij}\{\mathbf{A}\}_{ij}\}=\begin{bmatrix} a\left(\frac{d}{ad-bc}\right) & b\left(\frac{-b}{ad-bc}\right) \\ c\left(\frac{-c}{ad-bc}\right) & d\left(\frac{a}{ad-bc}\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-b^2}{ad-bc} \\ \frac{-c^2}{ad-bc} & \frac{ad}{ad-bc} \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\mathbf{1}$$

```
(%i8)          /*常數乘以矩陣*/
       k*A;
(%o8) [ a k   b k ]
      [           ]
      [ c k   d k ]
```

矩陣的自乘用「^^2」. 注意「^2」只會將每個元素平方後形成新的矩陣, $\mathbf{A}^2\neq\{A_{ij}^2\}$ 兩者不同.

```
(%i9)                  /*矩陣A的平方即爲AA相乘的結果*/
       A^^2;
       A.A;
       is(
         A^^2 = A.A
       );
(%o9) [ b c+a^2   b d+a b ]
      [                   ]
      [ c d+a c   d^2+b c ]
(%o10) [ b c+a^2   b d+a b ]
       [                   ]
       [ c d+a c   d^2+b c ]
(%o11) true
```

```
(%i12)                 /*將矩陣每個元素平方不等於AA相乘的結果*/
       A^^2;
       A^2;
       is(
         A^^2 = A^2
       );
(%o12) [ b c+a^2   b d+a b ]
       [                   ]
       [ c d+a c   d^2+b c ]
(%o13) [ a^2   b^2 ]
       [           ]
       [ c^2   d^2 ]
(%o14) false
```

指定 1 個 2×2 的旋轉矩陣.

```
(%i1) M: matrix(
           [cos(t), -sin(t)],
           [sin(t),  cos(t)]
         );
```

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

驗證 $\mathbf{M}\mathbf{M}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}$, 即 $\mathbf{M}^{\mathrm{T}} = \mathbf{M}^{-1}$, 說明 $\mathbf{M}$ 是 1 個正交矩陣.

```
(%i2) M . transpose(M),
      trigreduce,
      ratsimp;
```

$$(\%o2)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

利用 matrix 的形式指定 $\mathbf{r}$ 為 1 個縱式向量 (column vector).

```
(%i3) r: matrix(
           [x],
           [y]
         );
```

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

求 2 維向量的正交變換 $\mathbf{M}\mathbf{r}$, 變換後的另 1 個縱式向量.

```
(%i4) M.r;
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} \cos(t)\,x-\sin(t)\,y \\ \cos(t)\,y+\sin(t)\,x \end{bmatrix}$$

§7.4 進一步的矩陣運算

指定 1 個正方矩陣 $\mathbf{B}$.

```
(%i1) B: matrix(
            [4, 0, 1],
            [2, 3, 2],
            [1, 0, 4]
          );
```

$$(\%o1)\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

計算其對角線和 (trace).

```
(%i2) mat_trace(B);
(%o2) 11
```

詢問矩陣的維度. 顯然正方矩陣 **B** 是 1 個 3×3 的矩陣.

```
(%i3) matrix_size(B);
(%o3) [3,3]
```

抽選第 2 個縱欄 (column).

```
(%i4) col(B,2);
```

$$(\%o4)\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$$

抽選第 2 個橫排 (row).

```
(%i5) row(B,2);
(%o5) [2  3  2]
```

§7.6 矩陣的 eigenvalues 與 eigenvectors

在線性代數中, 有所謂的 eigenvalues (本徵值; 特徵值; 固有值) 及 eigenvectors (本徵向量; 特徵向量; 固有向量) 的問題. 可按 [F1] 參照說明中有關的功能(function). 在某些版本的 Maxima 中, 相關的程式庫不會主動讀進來, 要先用 `load("eigen")` 讀入程式庫.

沿用 (%i1) 所指定的矩陣 **B**，使用 function 功能 eigenvalues 求出其特徵值.

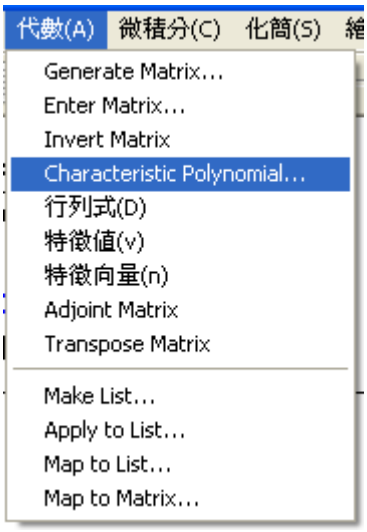
```
(%i6) eigenvalues(B);
(%o6) [[5,3],[1,2]]
```

所列出的結果中, 指出 5 是一重特徵值, 3 則是二重簡併的特徵值.

若從上方 選單 menu 選擇 [Algebra 代數] → [Eigenvalues 特徵值], 會自動輸入 eigenvalues(%), 並立即輸出結果.

要細心檢查以上的結果，可以計算 $\det(\mathbf{B}-t\mathbf{1})=0$，得到特徵方程式 $t^3-11t^2+39t-45=(t-5)(t-3)^2=0$, 的確有重根的存在. 特徵多項式可以利用 function 功能 charpoly 來求得.

若從上方 選單 menu 選擇 [Algebra 代數] → [Characteristic Polynomial], 會出現 [Char poly 特徵多項式] 對話窗, 在 [Matrix 矩陣] 及 [Variable 變數] 格中填入適當的內容, 程式會依 function 功能格式 charpoly(..., ...), expand; 自動輸入, 並立即輸出結果.



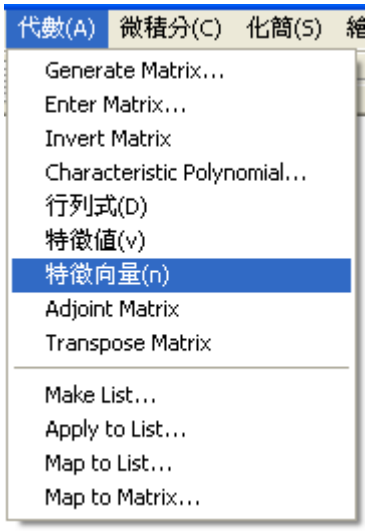
再來進一步用 function 功能 eigenvectors 求出特徵向量.

```
(%i7) eigenvectors(B);
(%o7) [[[5,3],[1,2]],[[[1,2,1]],[[1,0,-1],[0,1,0
]]]]
```

可知特徵向量 $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ 是對應於特徵值 5, 而 2 個特徵向量 $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ 是對應於特徵值 3. 更進一步來說, $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ 所張的平面上之任一向量, 也就說 $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ 這 2 個

特徵向量任意的線性組合 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ -a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 都具有特徵向量的特性, 程式在平面上舉出互相垂直的 2 個特徵向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 作為代表.

若從上方menu選擇 [代數] → [特徵向量], 會自動輸入 `eigenvectors(%)`, 並立即輸出結果.



若我們希望特徵向量被歸一化成單位向量時, 可以使用功能 `uniteigenvectors` 求出單位特徵向量.

```
(%i8) uniteigenvectors(B);
(%o8) [[[5,3],[1,2]],[[[1/sqrt(6),2/sqrt(6),1/sqrt(6)]],[[1/sqrt(2),0,-1/sqrt(2)],[
0,1,0]]]]
```

結果中的特徵向量皆被歸一化成單位向量. 特徵向量 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是對應於特徵值 5, 而 2 個特徵向量 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是對應於特徵值 3.

§7.6 complex 向量

當向量的元素含有complex number時, 內積的運算可利用程式庫中的定義. 先 `load("eigen")`, 之後利用 `dotproduct` 或 `innerproduct` 等功能作複向量的內積即可.